

**Capítulo 18****ACERTIJS NUMÉRICOS****1. Con siete cifras**

Escriba, una detrás de otra, siete cifras del 1 al 7:

1234567.

Estas cifras pueden unirse entre sí por medio de signos más y menos, de modo que se obtenga el resultado 40:

$$12 + 34 - 5 + 6 - 7 = 40.$$

Procure usted encontrar ahora otra combinación de estas mismas cifras que dé 55 y no 40.

**2. Nueve cifras**

Escriba sucesivamente nueve cifras: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Sin alterar su orden, puede usted poner entre ellas signos más y menos, de modo que el resultado que den sea exactamente 100.

Por ejemplo, no es difícil, poniendo seis signos (más o menos), obtener el número 100 del siguiente modo:

$$12 + 3 - 4 - 5 + 67 + 8 + 9 = 100.$$

Si sólo quiere poner cuatro signos (más o menos), también puede obtener 100:

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100.$$

Pero intente usted obtener 100 utilizando los signos más y menos sólo tres veces. Esto es mucho más difícil, pero completamente posible; lo único que hay que hacer es buscar la solución con paciencia.

**3. Con diez cifras**

Expresé usted el número 100 empleando todas las 10 cifras.

¿Por cuántos procedimientos puede hacerlo?

Existen no menos de cuatro procedimientos.

**4. La unidad**

Expresé usted la unidad valiéndose de todas las diez cifras.

**5. Con cinco dígitos**

Dispone usted de cinco dígitos y de los signos de las operaciones matemáticas que crea necesarios. Valiéndose solamente de este material numérico, aprovechándolo totalmente y utilizando los signos de las operaciones matemáticas, exprese los números siguientes: 15, 11 y 12 321.

**6. Otra vez con cinco doses**

Puede expresarse el número 28 con cinco doses?

**7. Con cuatro doses**

Este problema es más difícil que los precedentes. Hay que expresar el número 111 por medio de cuatro doses. ¿Puede expresarse?

**8. Con cinco treses**

Usted sabe, como es natural, que con cinco treses y los signos de las operaciones matemáticas se puede escribir el número 100 así:

$$33 * 3 + 3 = 100.$$

Pero, ¿puede escribirse el número 10 con cinco treses?

**9. El número 37**

Escriba de un modo semejante el número 37, utilizando solamente cinco treses y los signos de las operaciones.

**10. Por cuatro procedimientos**

Expresa el número 100, con cinco cifras iguales, por cuatro procedimientos diferentes.

**11. Con cuatro treses**

Expresar el número 12 por medio de cuatro treses es muy sencillo:

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3.$$

Un poco más ingenioso es expresar de un modo semejante los números 15 y 18 con cuatro treses:

$$15 = (3 + 3) + (3 * 3)$$

$$18 = (3 * 3) + (3 * 3)$$

Pero si fuera necesario expresar, de este mismo modo, el número 5 por medio de cuatro treses, lo más probable es que no cayese pronto en que  $5 = ((3 + 3)/3) + 3$

Pruebe ahora a buscar por su cuenta los procedimientos para expresar con cuatro treses los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, es decir, todos los números del 1 al 10 (ya hemos dicho como se escribe el número 5).

**12. Con cuatro cuatros**

Si ha conseguido resolver el problema anterior y le gustan estos rompecabezas, intente componer todos los números del 1 al 100 con cuatro cuatros. Esto no es más difícil que expresar estos mismos números con treses.

**13. Con cuatro cincos**

Hay que expresar el número 16 valiéndose de cuatro cincos unidos entre sí por los signos de las operaciones.

¿Cómo puede hacerse?

**14. Con cinco nueves**

Expresé el número 10 con cinco nueves. Hágalo, por lo menos, por dos procedimientos.

**15. Veinticuatro**

Es muy fácil expresar el número 24 por tres ochos:  $8 + 8 + 8$ . Pero, puede usted hacer lo mismo con otras tres cifras iguales? Este problema tiene más de una .

**16. Treinta**

El número 30 es fácil de representar con tres cincos:  $5 * 5 + 5$ . Hacer esto mismo con otras tres cifras iguales es más difícil. Haga la prueba. Quizá logre encontrar varias soluciones.

**17. Mil**

¿Puede usted expresar el número 1000 con ocho cifras iguales? Además de las cifras pueden utilizarse los signos de las operaciones.

**18. ¿Cómo obtener veinte?**

Aquí ve usted tres números, escritos uno debajo de otro,

111  
777  
999

Hay que tachar seis de estas cifras de tal modo, que los números que queden sumen 20. ¿Puede usted hacerlo?

**19. Tachar nueve cifras**

La siguiente columna de cinco filas contiene 15 cifras impares:

111  
333  
555  
777  
999

El problema consiste en tachar nueve cifras, eligiéndolas de manera, que al sumar las columnas de las seis cifras restantes se obtenga el resultado 1111.

**20. En el espejo**

¿Qué año del siglo pasado aumenta 4 1/2 veces si se mira su imagen en el espejo?

**21. ¿Qué año?**

¿Hay algún año del siglo actual que no varíe al ponerlo «cabeza abajo»?

**22. ¿Qué números?**

¿Qué dos números enteros, si se multiplican entre sí dan 7?

No olvide que los dos números han de ser enteros; por lo tanto, las soluciones del tipo  $3 \frac{1}{2} * 2$  ó  $2 \frac{1}{3} * 3$  no valen.

### 23. Sumar y multiplicar

Qué dos números enteros dan más sumándolos que multiplicándolos entre sí?

### 24. Lo mismo

¿Qué dos números enteros dan lo mismo si se multiplican entre sí que si se suman?

### 25. Número par primo

Usted sabe, claro está, qué números se llaman primos o simples: los que sólo se dividen exactamente por sí mismos y por la unidad. Los demás números se llaman compuestos. ¿Qué piensa usted, son compuestos todos los números pares o existen algunos que son primos?

### 26. Tres números

Qué tres números enteros, si se multiplican entre sí, dan lo mismo que se obtiene de su suma?

### 27. Suma y multiplicación

Es indudable que usted ya se habrá fijado en la curiosa peculiaridad de las igualdades

$$2 + 2 = 4, 2 \times 2 = 4.$$

Este es el único ejemplo en que la suma y el producto de dos números enteros (iguales) dan el mismo resultado.

Pero es muy posible que usted no sepa que existen números que, sin ser iguales, poseen esta misma propiedad, es decir, su suma es igual a su producto.

Procure encontrar ejemplos de estos números. Para que no crea que su búsqueda será inútil, le diré que hay muchos números de éstos, pero que no todos son enteros.

### 28. Multiplicación y división

Qué dos números enteros, si se divide el mayor por el menor, dan lo mismo que se obtiene cuando se multiplican entre sí?

### 29. Un número de dos cifras

Si cierto número de dos cifras se divide por la suma de sus cifras, como resultado vuelve a obtenerse la suma de las cifras del dividendo. Halle este número.

### 30. Diez veces mayor

Los números 12 y 60 tienen una propiedad interesante: si se multiplican, se obtiene un número exactamente 90 veces mayor que si se suman:

$$12 * 60 = 720, 12 + 60 = 72$$

Intente encontrar otra pareja como ésta. Si tiene suerte, quizá pueda encontrar varios números con esta misma propiedad.

### 31. Con dos cifras

¿Cuál es el menor número entero y positivo que puede escribir usted con dos cifras?

### 32. El número mayor

¿Cuál es el mayor número que puede usted escribir con cuatro unos?

### 33. Quebrados singulares

Fíjese atentamente en el quebrado  $6729/13\ 458$ .

En él se ha utilizado una vez cada una de las nueve cifras significativas. Este quebrado, como es fácil comprobar, es igual a  $1/2$ .

¿Podría usted, siguiendo este modelo, componer con las nueve cifras los quebrados  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/6$ ,  $1/7$ ,  $1/8$ , y  $1/9$

### 34. ¿Por cuánto multiplicó?

Un escolar hizo una multiplicación y después borró del encerado gran parte de las cifras, de modo que sólo se conservó la primera fila de números y dos cifras de la última fila; de las demás únicamente quedaron vestigios. Lo que siguió escrito era:

$$\begin{array}{r} \times 235 \\ \hline \quad ** \\ \hline \quad **** \\ \hline \quad **** \\ \hline **56* \end{array}$$

¿Podría usted restablecer el número por el cual multiplicó el escolar?

### 35. ¿Qué cifras faltan?

En este ejemplo de multiplicación más de la mitad de las cifras se han sustituido por asteriscos:

$$\begin{array}{r} \times *1* \\ \quad 3*2 \\ \quad \hline \quad *3* \\ + 3*2* \\ \quad *2*5 \\ \quad \hline 1*8*30 \end{array}$$

¿Podría usted restablecer las cifras que faltan?

### 36. ¿Qué números?

He aquí otro problema del mismo tipo. Hay que establecer qué números son los que se multiplican en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r}
 *1* \\
 \times 3*2 \\
 \hline
 *3* \\
 + 3*2* \\
 *2*5 \\
 \hline
 1*8*30
 \end{array}$$

**37. Casos raros de multiplicación**

Observe el siguiente caso de multiplicación de dos números:

$$48 * 159 = 7632.$$

Llama la atención porque en él participa una vez cada una de las nueve cifras significativas. ¿Podría usted seleccionar varios ejemplos más de este tipo? Si los hay, ¿cuántos son los que existen?

**38. Una división misteriosa**

Esto que aquí se representa no es más que un ejemplo de división de dos números de varias cifras, en el cual todas ellas se han sustituido por puntos:

$$\begin{array}{r}
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots \\
 \dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 \dots\dots \\
 \hline
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

No se da ni una sola cifra del dividendo ni del divisor. Se sabe únicamente que la penúltima cifra del cociente es 7. Hay que hallar el resultado de esta división.

Advertimos, por si acaso, que todos los números se consideran escritos aquí según el sistema de numeración decimal.

Este problema sólo tiene una .

**39. ¿Qué se dividió?**

Restablezca las cifras que faltan en el siguiente ejemplo de división:

$$\begin{array}{r}
 *2*5* \\
 *** \\
 \hline
 *0* \\
 *9* \\
 \hline
 *5* \\
 *5* \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 325 \\
 1** \\
 \hline
 \end{array}$$

**40. División por 11**

Escriba cualquier número de nueve cifras, en que no se repita ninguna de ellas (es decir, que tenga todas las cifras diferentes), que sea divisible por 11 exactamente. Escriba el menor de estos números. Escriba el mayor de estos números.

**41. Triángulo numérico**

Distribuya las nueve cifras significativas por los círculos de este triángulo (fig. 230), de modo que en cada lado sumen 20.

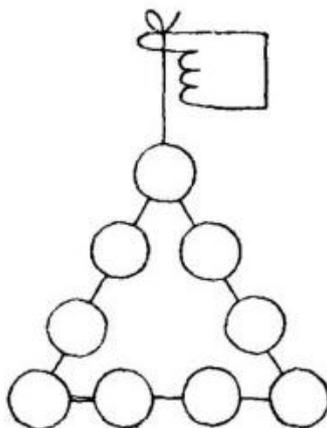


Figura 230

**42. Otro triángulo numérico**

Distribuir todas las cifras significativas por los círculos del mismo triángulo de manera que en cada lado sumen 17.

**43. La estrella de ocho puntas**

Los números del 1 al 16 deben situarse en los puntos de intersección de las líneas del dibujo representado en la fig. 231, de modo que la suma de los números que hay en cualquiera de los lados de cada cuadrado sea 34 y la de los que hay en los vértices de cada cuadrado también sea 34.

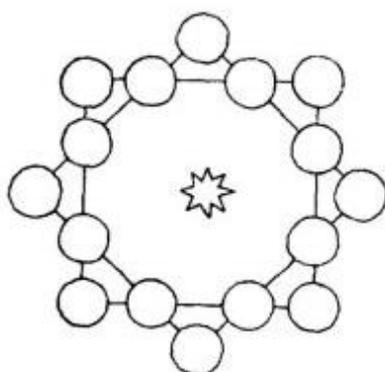


Figura 231

**44. La estrella mágica**

La estrella numérica de seis puntas representada en la fig. 232 posee una propiedad «mágica»: todas sus seis filas de números suman lo mismo:

$$4 + 6 + 7 + 9 = 26$$

$$4 + 8 + 12 + 2 = 26$$

$$4 + 5 + 10 + 2 = 26$$

$$11 + 6 + 8 + 1 = 26$$

$$11 + 7 + 5 + 3 = 26$$

$$1 + 12 + 10 + 3 = 26$$

Pero la suma de los números situados en las puntas de la estrella es otra:

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$$

¿No podría usted perfeccionar esta estrella colocando los números en los círculos de tal manera que no sólo las filas rectas den la misma suma (26), sino que también compongan esta suma (26) los números situados en sus puntas?

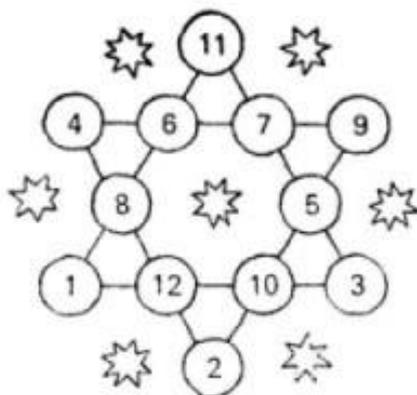


Figura 232

**45. La rueda numérica**

Las cifras del 1 al 9 deben disponerse en el dibujo de la fig. 233, de modo que, estando una en el centro de la circunferencia y las demás en los extremos de los diámetros, la suma de las tres cifras de cada fila (diámetro) sea igual a 15.

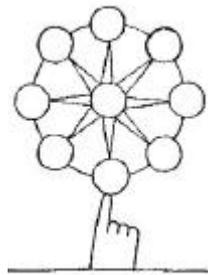


Figura 233

#### 46. El tridente

En las casillas del tridente aquí representado (fig. 234) hay que escribir los números del 1 al 13 de tal manera, que la suma de las cifras en cada una de las tres columnas verticales (I, II, III) y en la fila horizontal (IV) sea la misma.

Procure hacerlo.

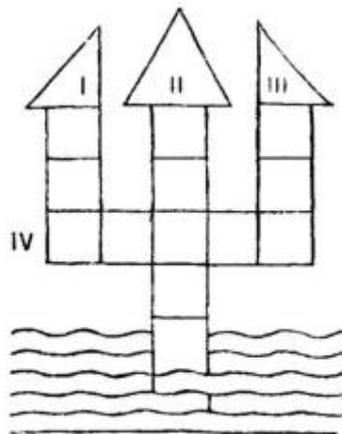


Figura 234

### Capítulo 18 SOLUCIONES

#### 1. Con siete cifras

Este problema tiene no una, sino tres soluciones distintas, a saber:

$$123 + 4 - 5 - 67 = 55;$$

$$1 - 2 - 3 - 4 + 56 + 7 = 55;$$

$$12 - 3 + 45 - 6 + 7 = 55$$

#### 2. Nueve cifras

He aquí por qué procedimiento puede usted obtener 100 de una serie de nueve cifras y tres signos más y menos:

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100$$

Esta es la única solución posible; ninguna otra combinación de las nueve cifras y de los signos más y menos, empleados tres veces, puede dar el resultado 100.

Lograr este mismo resultado utilizando los signos de sumar y restar menos de tres veces, es imposible.

### 3. Con diez cifras

Aquí tiene cuatro soluciones:

$$70 + 24 \frac{9}{18} + 5 \frac{3}{5} = 100;$$

$$80 \frac{27}{54} + 19 \frac{3}{6} = 100;$$

$$87 + 9 \frac{4}{5} + 3 \frac{12}{60} = 100;$$

$$50 \frac{1}{2} + 49 \frac{38}{76} = 100.$$

### 4. La unidad

Hay que representar la unidad como suma de dos quebrados;

$$148/296 + 35/70 = 1$$

Los que sepan álgebra pueden dar otras soluciones, como, por ejemplo,  $123\ 456\ 789^0$ ;

$234\ 567^{(9-8-1)}$ , etc., ya que todo número elevado a la potencia cero es igual a la unidad.

### 5. Con cinco doses

El número 15 puede escribirse así:

$$70 + 24 \frac{9}{18} + 5 \frac{3}{5} = 100;$$

$$80 \frac{27}{54} + 19 \frac{3}{6} = 100;$$

$$87 + 9 \frac{4}{5} + 3 \frac{12}{60} = 100;$$

$$50 \frac{1}{2} + 49 \frac{38}{76} = 100.$$

Y el número 11, así:

$$22/2 + 2 - 2 = 11.$$

El número 12 321. A primera vista parece que es imposible escribir este número de cinco cifras con cinco números iguales. Sin embargo, el problema puede resolverse. La solución es:

$$\left(\frac{222}{2}\right)^2 = 111^2 = 111 \times 111 = 12\,321.$$

### 6. Otra vez con cinco doses

$$22 + 2 + 2 + 2 = 28.$$

### 7. Con cuatro doses

$$222/2 = 111.$$

### 8. Con cinco treses

He aquí la solución del problema

$$(33/3) - (3/3) = 10$$

Es interesante el hecho de que este problema se resolvería exactamente lo mismo, si el número 10 hubiera que expresarlo no con cinco treses, sino con cinco unidades, cinco cuatros, cinco sietes, cinco nueves y, en general, por cualesquiera cinco cifras iguales.

En efecto:

$$11/1 - 1/1 = 22/2 - 2/2 = 44/4 - 4/4 = 99/9 - 9/9, \dots \text{etc}$$

Existen otras formas de resolver este mismo problema:

$$(3 * 3 * 3 + 3)/3 = 10$$

$$\frac{3^3}{3} + \frac{3}{3} = 10$$

### 9. El número 37

Hay dos soluciones:

$$33 + 3 + 3 / 3 = 37;$$

$$333/3 * 3 = 37.$$

### 10. Por cuatro procedimientos

El número 100 puede expresarse por medio de cinco cifras iguales, utilizando para ello unos, treses y -lo que es aún más fácil- cincos:

$$111 - 11 = 100;$$

$$33 * 3 + 3 / 3 = 100;$$

$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100;$$

$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100.$$

### 11. Con cuatro treses

1 = 33/33 (hay otros procedimientos):

$$2 = 3 / 3 + 3 / 3 ;$$

$$3 = 3 + 3 + 3 / 3 ;$$

$$4 = 3 \times 3 + 3 / 3 ;$$

$$6 = (3 + 3) \times 3 / 3$$

Sólo damos las soluciones hasta el número seis. Las demás piénsalas usted mismo. Las soluciones indicadas también pueden componerse de otras combinaciones de treses.

### 12. Con cuatro cuatros

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{44}{44}, \quad \text{ó} \quad \frac{4+4}{4+4}, \quad \text{ó} \quad \frac{4 \times 4}{4 \times 4}, \quad \text{etc.} \\
2 &= \frac{4}{4} + \frac{4}{4}, \quad \text{ó} \quad \frac{4 \times 4}{4+4}; \\
3 &= \frac{4+4+4}{4}, \quad \text{ó} \quad \frac{4 \times 4 - 4}{4}; \\
4 &= 4 + 4 \times (4-4); \\
5 &= \frac{4 \times 4 + 4}{4}; \\
6 &= \frac{4+4}{4} + 4; \\
7 &= 4 + 4 - \frac{4}{4}, \quad \text{ó} \quad \frac{44}{4} - 4; \\
8 &= 4 + 4 + 4 - 4, \quad \text{ó} \quad 4 \times 4 - 4 - 4; \\
9 &= 4 + 4 + \frac{4}{4}; \\
10 &= \frac{44 - 4}{4}.
\end{aligned}$$

**13. Con cuatro cincos**

Sólo existe un procedimiento:

$$55/5 + 5 = 16.$$

**14. Con cinco nueves**

Dos procedimientos son:

$$9 + 99/99 = 10,$$

$$99/9 - 9/9 = 10$$

El que sepa álgebra puede añadir varias soluciones más, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\left(9 \frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} &= 10, \\
9 + 99^{9-9} &= 10
\end{aligned}$$

**15. Veinticuatro**

Aquí tiene dos soluciones:

$$22 + 2 = 24; \quad 3^3 - 3 = 24$$

**16. Treinta**

Damos tres soluciones:

$$6 \times 6 - 6 = 30; \quad 3^3 + 3 = 30; \quad 33 - 3 = 30.$$

**17. Mil**

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$$

**18. ¿Cómo obtener veinte?**

He aquí como hay que hacer esto (las cifras tachadas han sido sustituidas por ceros):

$$\begin{array}{r} 011 \\ 000 \\ 009 \end{array}$$

En efecto,

$$11 + 9 = 20.$$

**19. Tachar nueve cifras**

Este problema admite varias soluciones. Damos cuatro ejemplos, sustituyendo por ceras las cifras tachadas:

100	111	011	101
000	030	330	303
005	000	000	000
007	070	770	707
<u>999</u>	<u>900</u>	<u>000</u>	<u>000</u>
1111	1111	1111	1111

**20. En el espejo**

Las únicas cifras que no se desfiguran en el espejo son 1, 0 y 8. Por lo tanto, el año que se busca sólo puede contener estas cifras. Sabemos además que se trata de uno de los años del siglo XIX, cuyas primeras dos cifras son 18.

Ahora ya es fácil comprender que este año es el 1818. En el espejo, el año 1818 se convertirá en 8181, que es exactamente  $4 \frac{1}{2}$  mayor que 1818:

$$1818 * 4 \frac{1}{2} = 8181.$$

Este problema no tiene más soluciones.

**21. ¿Que año?**

En el siglo XX sólo hay un año de este tipo, el 1961.

**22. ¿Qué números?**

La respuesta es fácil: 1 y 7. Otros números que den 7 no hay.

**23. Sumar y multiplicar**

Números de estos hay tantos como se quieran:

$$\begin{array}{l} 3 \times 1 = 3; \quad 3 + 1 = 4 \\ 10 \times 1 = 10; \quad 10 + 1 = 11 \end{array}$$

y, en general, toda pareja de números enteros en que uno de ellos sea la unidad. Esto se debe a que sumándole una unidad, el número aumenta, mientras que si se multiplica por la unidad, el número no varía.

#### 24. Lo mismo

Estos números son 2 y 2. Otros números enteros que tengan estas propiedades no existen.

#### 25. Número par primo

Existe un número par primo, el 2. Este número sólo es divisible por sí mismo (y por la unidad).

#### 26. Tres números

1, 2 y 3 dan el mismo resultado cuando se multiplican entre sí que cuando se suman:

$$1 + 2 + 3 = 6; 1 * 2 * 3 = 6$$

#### 27. Suma y multiplicación

Existe una cantidad innumerable de pares de números de este tipo. He aquí varios ejemplos:

$$\begin{array}{llll} 3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}, & 3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}; & 11 + 1,1 = 12,1, & 11 \times 1,1 = 12,1 \\ 5 + 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}, & 5 \times 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}; & 21 + 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20}; & 21 \times 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20}; \\ 9 + 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}, & 9 \times 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}; & 101 + 1,01 = 102,01, & 101 \times 1,01 = 102,01, \text{ etc.} \end{array}$$

#### 28. Multiplicación y división

Números así hay muchos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} 2 : 1 = 2, 2 \times 1 = 2; \\ 7 : 1 = 7, 7 \times 1 = 7; \\ 43 : 1 = 43, 43 \times 1 = 43; \end{array}$$

#### 29. Un número de dos cifras

El número buscado debe ser, evidentemente, un cuadrado exacto. Como entre los números de dos cifras sólo hay seis cuadrados, por medio de pruebas puede hallarse fácilmente la única solución, es decir, el número 81:

$$81/8+1 = 8 + 1$$

#### 30. Diez veces mayor

He aquí cuatro parejas de números de este tipo:

$$11 \text{ y } 110; 14 \text{ y } 35; 15 \text{ y } 30; 20 \text{ y } 20$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
 11 * 110 &= 1210; & 11 + 110 &= 121; \\
 14 * 35 &= 490; & 14 + 35 &= 49; \\
 15 * 30 &= 450; & 15 + 30 &= 45; \\
 20 * 20 &= 400; & 20 + 20 &= 40;
 \end{aligned}$$

Este problema no tiene otras soluciones. Buscar las soluciones a ciegas es bastante embarazoso. Teniendo nociones de álgebra, el problema resulta más fácil y es posible no sólo buscar todas las soluciones, sino también cerciorarse de que no tiene más que cinco.

### 31. Con dos cifras

El número menor que puede escribirse con dos cifras no es 10, como pensarán posiblemente algunos lectores, sino la unidad expresada del modo siguiente:

$$1/1, 2/2, 3/3, 4/4 \text{ y así sucesivamente hasta } 9/9.$$

Los que saben álgebra añaden a estas expresiones una serie de otras:

$$1^0, 2^0, 3^0, 4^0 \text{ y así sucesivamente hasta } 9^0$$

porque todo número elevado a la potencia cero es igual a la unidad<sup>1</sup>.

### 32. El número mayor

Por lo general responden a esta pregunta escribiendo el número 1111. Pero este número dista mucho de ser el mayor. Mucho mayor -en 250 millones de veces es

$$11^{11}$$

Aunque representado nada más que por cuatro unidades, este número contiene, si se calcula, más de 285 millares de millones de unidades.

### 33. Quebrados singulares

El problema tiene varias soluciones. He aquí una de ellas:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} &= \frac{5823}{17\ 469}; & \frac{1}{4} &= \frac{3942}{15\ 768}; \\
 \frac{1}{5} &= \frac{2697}{13\ 485}; & \frac{1}{6} &= \frac{2943}{17\ 658}; \\
 \frac{1}{7} &= \frac{2394}{16\ 758}; & \frac{1}{8} &= \frac{3187}{25\ 496}; \\
 \frac{1}{9} &= \frac{6381}{57\ 429}.
 \end{aligned}$$

Existe un gran número de variantes; sobre todo puede representarse de muchas formas la fracción  $1/8$  (¡por más de 40 procedimientos!).

<sup>1</sup> Pero serían erróneas las soluciones  $0/0$  ó  $0^0$ ; estas expresiones carecen de sentido en general.

**34. ¿Por cuánto multiplicó?**

Razonaremos así. La cifra 6 se obtuvo de la suma de una columna de dos cifras, de las cuales, la inferior puede ser 0 ó 5. Pero si la inferior es 0, la superior tendrá que ser 6. ¿Puede ser 6 la cifra superior? Hagamos la prueba. Resulta que cualquiera que sea la segunda cifra del multiplicador, es imposible obtener 6 en el penúltimo lugar del primer producto parcial. Por lo tanto, la cifra inferior de la penúltima columna debe ser 5; y, en este caso, sobre ella se encuentra un 1.

Ahora ya es fácil reconstruir parte de las cifras borradas:

$$\begin{array}{r} \times 235 \\ \hline **1* \\ + ***5 \\ \hline **56* \end{array}$$

La última cifra del multiplicador debe ser mayor que 4, de lo contrario el primer producto parcial no tendría cuatro cifras. Esta cifra no puede ser 5 (porque con ella no se obtendría 1 en el penúltimo lugar). Veamos si sirve 6. Tenemos:

$$\begin{array}{r} \times 235 \\ \hline *6 \\ \hline 1410 \\ + ***5 \\ \hline **560 \end{array}$$

Razonando de igual modo en adelante, hallamos que el multiplicador es igual a 96. ¿Qué cifras faltan?

Las cifras que faltan se reponen gradualmente, si se razona como sigue.

Para mayor comodidad numeraremos las filas:

$$\begin{array}{r} *1* \quad \text{I} \\ \times 3*2 \quad \text{II} \\ \hline *3* \quad \text{III} \\ + 3*2* \quad \text{IV} \\ *2*5 \quad \text{V} \\ \hline 1*8*30 \quad \text{VI} \end{array}$$

Se comprende fácilmente que el último asterisco de la fila III es un 0, ya que 0 figura al final de la fila VI.

Ahora se determina el valor del último asterisco de la fila I: ésta es una cifra que multiplicada por 2 da un número que termina en cero, y multiplicada por 3, un número que termina en 5 (V fila). Por lo tanto, sólo puede ser 5.

No es difícil darse cuenta de que el asterisco de la fila II es un 8, porque sólo al multiplicarlo por 8, el número 15 da un resultado que termina en 20 (IV fila).

Finalmente, queda claro el valor del primer asterisco de la fila I: es la cifra 4, porque sólo el 4 multiplicado por 8 da un resultado que empieza en 3 (fila IV).

Hallar las demás cifras desconocidas no ofrece ya dificultad: basta multiplicar los números de las dos primeras filas, que ya están completamente determinados.  
 En fin de cuentas se obtiene el siguiente ejemplo de multiplicación:

$$\begin{array}{r} \times 415 \\ \times 382 \\ \hline 830 \\ + 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

**35. ¿Qué números?**

Razonando de un modo semejante a como se hizo en el ejemplo anterior, descubrimos los valores de los asteriscos en este caso.  
 Se obtiene:

$$\begin{array}{r} \times 325 \\ \times 147 \\ \hline 2275 \\ 1300 \\ + 325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

**36. Casos raros de multiplicación**

El lector que tenga paciencia puede encontrar nueve casos de multiplicación de este tipo, a saber:

- 12 \* 483 = 5796
- 42 \* 138 = 5796
- 18 x 297 = 5346
- 27 \* 198 = 5346
- 39 \* 186 = 7254
- 48 \* 159 = 7632
- 28 \* 157 = 4396
- 4 \* 1738 = 6952
- 4 \* 1963 = 7852

**37. Una división misteriosa**

Para mayor comodidad numeraremos las filas de puntos según la posición dada.

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad \dots\dots\dots | \dots \\ \hline \text{II} \quad \dots\dots\dots \\ \text{III} \quad \dots\dots\dots \\ \hline \text{IV} \quad \dots\dots\dots \\ \text{V} \quad \dots\dots\dots \\ \hline \text{VI} \quad \dots\dots\dots \\ \hline \text{VII} \quad \dots\dots\dots \end{array}$$

Observando la fila II llegamos a la conclusión de que la segunda cifra del cociente es 0, ya que fue necesario bajar, una detrás de otra, dos cifras del dividendo. Designemos todo el

divisor por  $x$ . Las filas IV y V demuestran que el número  $7x$  (producto de la penúltima cifra del cociente por el divisor) después de restarlo de un número que no supera a 999, dio un resto no menor que 100. Está claro que  $7x$  no puede ser mayor que  $999 - 100$ , es decir, que 899, de donde  $x$  no es mayor que 128. Vemos después que el número de la fila III es mayor que 900, de lo contrario al restarlo de un número de cuatro cifras no daría un resto de dos cifras. Pero en este caso la tercera cifra del cociente deberá ser  $900 : 128$ , es decir, mayor que 7,03 y, por consiguiente, igual a 8 ó a 9. Como los números de las filas I y VII son de cuatro cifras, es evidente que la tercera cifra del cociente es 8 y la última, 9.

Con esto queda resuelto, en realidad, el problema, puesto que el resultado que se buscaba de la división (es decir, el cociente) lo hemos encontrado: 90 879.

No hay necesidad de seguir adelante y buscar el dividendo y el divisor. El problema sólo planteaba encontrar el resultado de la división, o sea, el cociente. El problema no exige descifrar todo lo escrito. Pero, además, existe no una, sino 11 parejas de números que satisfacen, al hacer la división, la disposición dada de los puntos y dan la cifra 7 en el cuarto lugar del cociente.

Estos números son:

$$10\ 360\ 206 : 114 = 90\ 879$$

$$10\ 451\ 085 : 115 = 90\ 879$$

$$10\ 541\ 964 : 116 = 90\ 879$$

$$10\ 632\ 843 : 117 = 90\ 879$$

$$10\ 723\ 722 : 118 = 90\ 879$$

$$10\ 814\ 601 : 119 = 90\ 879$$

$$10\ 905\ 480 : 120 = 90\ 879$$

$$10\ 996\ 359 : 121 = 90\ 879$$

$$11\ 087\ 238 : 122 = 90\ 879$$

$$11\ 178\ 117 : 123 = 90\ 879$$

$$11\ 268\ 996 : 124 = 90\ 879$$

### 38. ¿Qué se dividió?

El caso de división buscado es:

$$\begin{array}{r|l} 52650 & 325 \\ - 325 & \underline{162} \\ \hline 2015 & \\ - 1950 & \\ \hline 650 & \\ - 650 & \\ \hline & \end{array}$$

### 39. División por 11

Para poder resolver este problema hay que conocer la condición de divisibilidad por 11. Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par y las de lugar impar es divisible por 11 o igual a cero. Probemos, por ejemplo, el número 23 658 904. La suma de las cifras de lugar par es:

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21;$$

Y la suma de las cifras de lugar impar:

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16.$$

Su diferencia (descontando la menor de la mayor) es igual a:

$$21 - 16 = 5.$$

Esta diferencia (5) no es divisible por 11; por lo tanto, el número que hemos tomado no puede dividirse por 11 sin que quede resto. Ensayemos otro número, el 7 344 535:

$$\begin{aligned} 3 + 4 + 3 &= 10; \\ 7 + 4 + 5 + 5 &= 21; \\ 21 - 10 &= 11. \end{aligned}$$

Y como 11 es divisible por 11, el número ensayado también es múltiplo de 11. Ahora es fácil comprender en qué orden hay que escribir las nueve cifras para obtener un número múltiplo de 11 que satisfaga las condiciones del problema. Por ejemplo: 352 049 786. Hacemos la prueba:

$$3 + 2 + 4 + 7 + 6 = 22, 5 + 0 + 9 + 8 = 22.$$

La diferencia  $22 - 22 = 0$ ; por consiguiente, el número que hemos escrito es múltiplo de 11. El mayor de todos los números de este tipo es: 987 652 413. El menor: 102 347 586.

#### 40. Triángulo numérico

La solución se muestra en la fig. 235. Las cifras medias de cada fila pueden permutarse y, de este modo, obtener una serie de soluciones más.

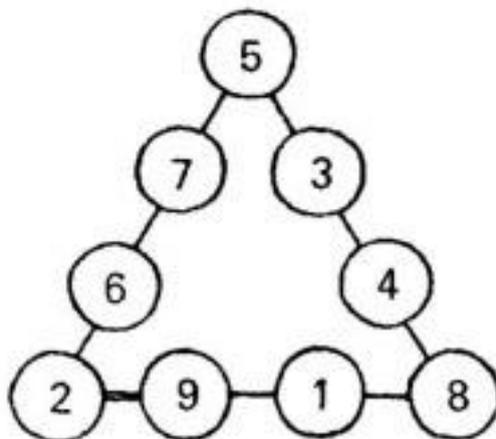


Figura 235

#### 41. Otro triángulo numérico

La solución se da en la fig. 236. Las cifras medias de cada fila se pueden permutar y obtener así una serie de soluciones más.

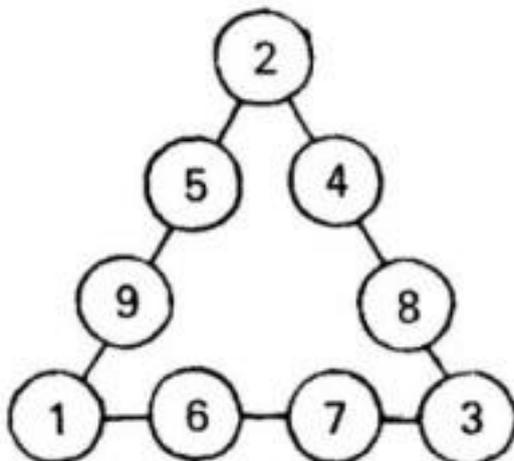


Figura 236

**42. La estrella de ocho puntas**

La solución puede verse en la fig. 237.

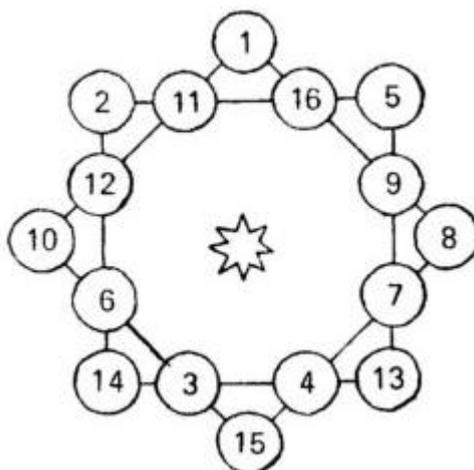


Figura 237

**43. La estrella mágica**

Para simplificar la búsqueda de la disposición que se requiere de los números, nos atendremos a las siguientes consideraciones.

La suma de los números que hay en las puntas de la estrella es igual a 26; y la de todos los números de la estrella, 78. Por lo tanto, la suma de los números del hexágono interior será  $78 - 26 = 52$ .

Consideremos ahora uno de los grandes triángulos. La suma de los números de cada uno de sus lados es igual a 26, y si sumamos los números de sus tres lados, obtenemos  $26 * 3 = 78$ , con la particularidad de que cada uno de los números que hay en las puntas participa dos veces. Y como la suma de los números de los tres pares internos (es decir, del hexágono interior) debe, como sabemos, ser igual a 52, la suma duplicada de los números que hay en los vértices de cada triángulo será  $78 - 52 = 26$ ; la suma simple será 13.

El campo de las búsquedas se ha reducido ya considerablemente. Sabemos, por ejemplo, que ni 12 ni 11 pueden ocupar las puntas de la estrella (¿por qué?). Por lo tanto, podemos empezar los ensayos a partir de 10, en este caso se determinan inmediatamente los dos números que deben ocupar los restantes vértices del triángulo. Estos números son 1 y 2. Prosiguiendo por este camino, encontramos finalmente la disposición requerida. Esta disposición se muestra en la fig. 238.

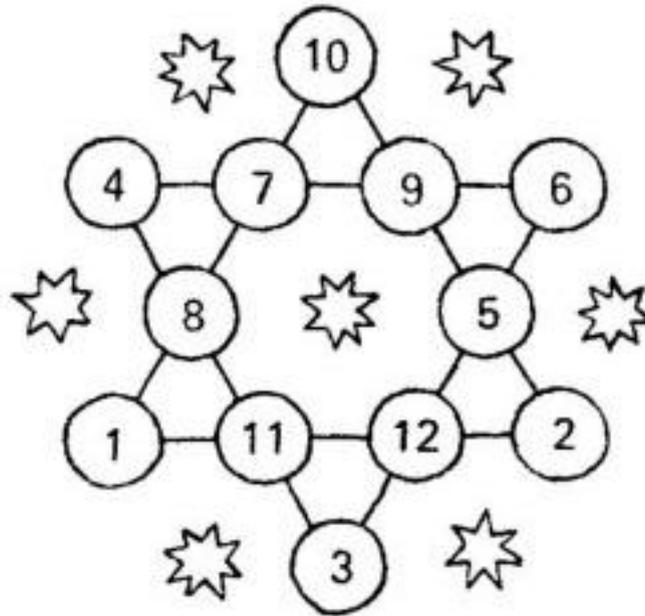


Figura 238

**44. La rueda numérica**

La solución se da en la fig. 239.

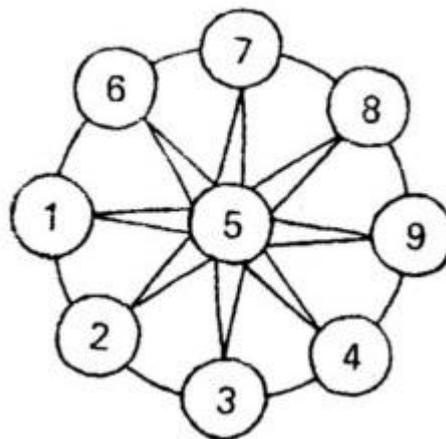


Figura 239

**45. El tridente**

He aquí la colocación que se exige de los números (fig. 240). La suma de los números en cada una de las tres columnas verticales y en la fila horizontal es igual a 25.

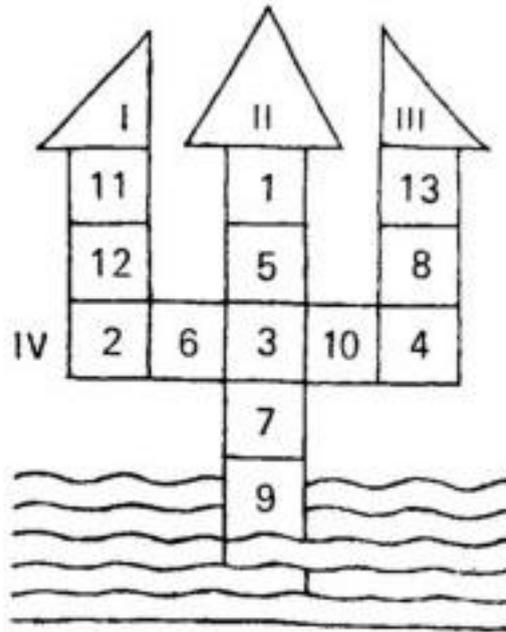


Figura 240